Calcul de la résonance d'un tube de Carillon

Par Stéphane

La formule exacte est la suivante : $\omega_i = A_i \sqrt{\dfrac{EI}{\rho S L^4}}$

ω_i : Résonance de la poutre (le tube dans notre cas)

A_i : Limite aux frontières. Cette limite est une constante liée à la façon dont le tube est maintenu aux extrémités et si le tube est ouvert ou/et fermé aux extrémités. Dans notre cas c'est le "mode 1" appui "libre-libre" :

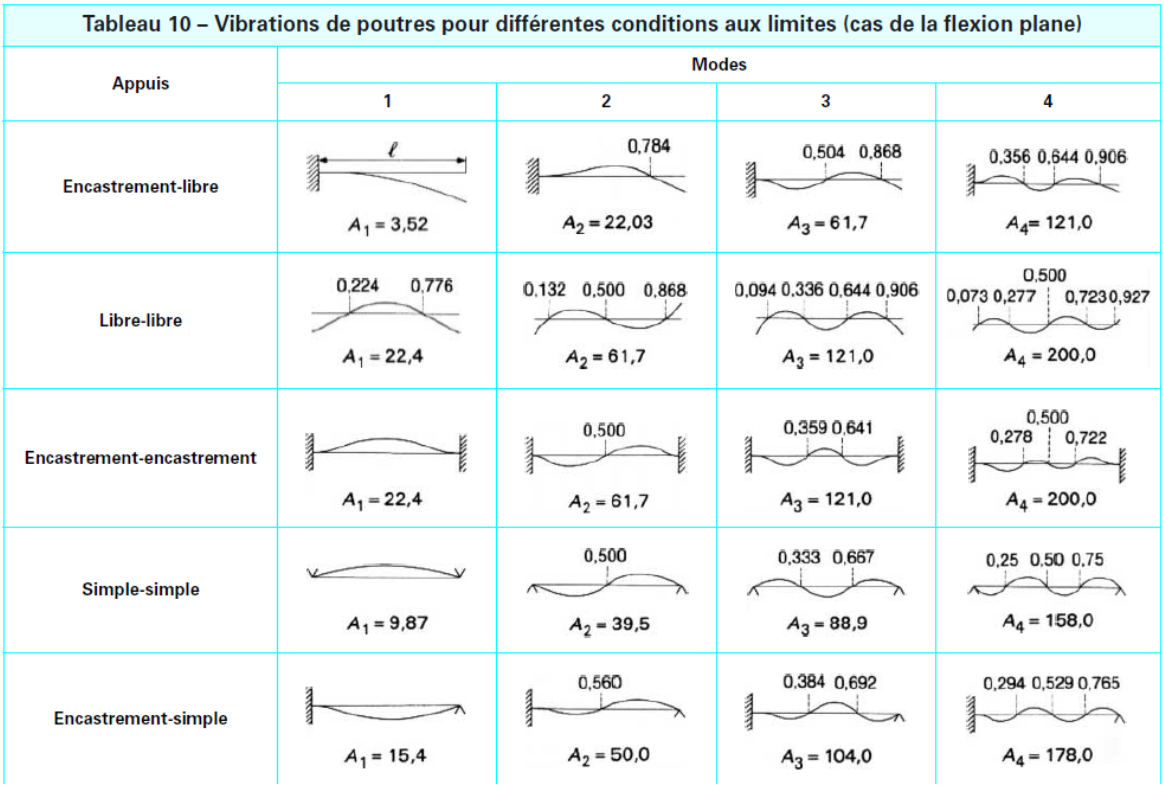

Tableau 10 – Vibrations de poutres pour différentes conditions aux limites (cas de la flexion plane)

Appuis	Modes 1	Modes 2	Modes 3	Modes 4
Encastrement-libre	ℓ $A_1 = 3{,}52$	0,784 $A_2 = 22{,}03$	0,504 0,868 $A_3 = 61{,}7$	0,356 0,644 0,906 $A_4 = 121{,}0$
Libre-libre	0,224 0,776 $A_1 = 22{,}4$	0,132 0,500 0,868 $A_2 = 61{,}7$	0,094 0,336 0,644 0,906 $A_3 = 121{,}0$	0,500 0,073 0,277 0,723 0,927 $A_4 = 200{,}0$
Encastrement-encastrement	$A_1 = 22{,}4$	0,500 $A_2 = 61{,}7$	0,359 0,641 $A_3 = 121{,}0$	0,500 0,278 0,722 $A_4 = 200{,}0$
Simple-simple	$A_1 = 9{,}87$	0,500 $A_2 = 39{,}5$	0,333 0,667 $A_3 = 88{,}9$	0,25 0,50 0,75 $A_4 = 158{,}0$
Encastrement-simple	$A_1 = 15{,}4$	0,560 $A_2 = 50{,}0$	0,384 0,692 $A_3 = 104{,}0$	0,294 0,529 0,765 $A_4 = 178{,}0$

Vibrations (A 410), Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences fondamentales Jacques Plusquellec, 1971, p.50

L'indice « i » permet de faire les calculs suivant les différentes harmoniques : n1, n2 …

E : Le module de Young ou module d'élasticité (longitudinale). C'est une constante qui relie la contrainte de traction (ou de compression) et le début de la déformation d'un matériau élastique isotrope (cette notion d'isotrope est purement théorique …). Ce paramètre est propre à chaque matériau. Il varie suivant les nuances et les tolérances de fabrication. Dans le cas des aluminiums, il y a 7 grandes familles, et dans chaque famille, des sous-familles. D'où les variations possibles, constatées par une mesure sonore, lorsque l'on achète plusieurs tubes qui semblent identiques.

I : Moment quadratique. C'est une valeur calculée qui est fonction du profil (de la géométrie) du tube. Entre 2 sections différentes, plus le I est élevé, plus le tube est résistant à la flexion, torsion (c'est notamment grâce à ce paramètre que l'on montre qu'un tube à section légèrement supérieure est plus résistant à la flexion qu'une barre pleine). Dans notre cas, lorsque l'on frappe un tube pour le faire sonner, celui-ci est soumis à une contrainte de flexion.

L : longueur du tube

ρ : Densité du matériau

S : Section du tube

En ce qui nous concerne :

E : entre 65000 et 85000 MPa (Méga Pascal = N/mm2). En général ~70000 MPa

A : A_1=22,37, A_2=61,67 ; A_3=120,9 et A_4=199,859

L : en mm

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}\ mm^4$$

ρ : ~ 2700 Kg/m3

$$S = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}\ mm^2$$

Dans notre mode de calcul, on compare ω *à* $2\pi f$

Donc on a : $\omega = A\sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}} = 2\pi f$

Par simplification : $\frac{A}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = L^2 f$ ou encore $c = L^2 f$ avec $c = \frac{A}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

Si l'on teste cette formule avec le fichier Excel avec L=1001 mm, et f=115,4hz

L^2xf = 1001 x 115,2 = 115 630 915

Vérification (attention aux unités, elles doivent être cohérentes):

Pour un tube de section 20x16, E=69500 MPa, ρ=2700 Kg/m3 on aura :

I = 4637 mm4

S = 113,1 mm3

A1 = 22,37

$$c = \frac{A}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{22,37}{2\pi}\sqrt{\frac{69500x4637}{2700.1E-6x113,1}} \simeq 115\ 660\ 000$$

Les 2 valeurs sont très proches et sans incidence sur le résultat final. Bien pratique quand on n'a pas de micro à disposition pour faire les mesures initiales.

Cette formule fonctionne également avec des tiges pleines. Dans ce cas, d=0.